Points sur les faces d'un cube
Sommaire

Programme officiel : Compétences exigibles :
4ème : calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.
3ème : connaître la nature des sections d'un cube par un plan parallèle à une arête.
Commentaires :
3ème : ce sera une occasion de faire des calculs de longueurs et d'utiliser les propriétés rencontrées au cours des années antérieures.

Objectifs pédagogiques :

- Repérer les obstacles à l'apprentissage de la géométrie dans l'espace.
- Savoir choisir une représentation pertinente pour le problème étudié.
- Réinvestir l'utilisation du théorème de Pythagore dans l'espace.

Pré-requis : **Savoirs :** théorème de Pythagore ; nature des sections du cube par un plan parallèle à une arête.
Savoir-faire : tracés géométriques à main levée ou avec instruments de dessin. Calculs de longueurs dans un cube.

Intérêt : Ce problème met tous les élèves en activité.
Il permet de connaître les différentes représentations et interprétations utilisées par les élèves pour traduire une situation spatiale.
Il est l'occasion d'un réinvestissement de notions déjà vues dans les classes précédentes. La solution n'étant pas du tout triviale, cela permet de justifier le recours à des calculs en géométrie dans l'espace et de faire prendre conscience aux élèves de l'intérêt d'une recherche élaborée.

Au lycée, variante de l'énoncé :
« Vous avez un cube de 10cm d'arête. Vous appelez A un sommet de ce cube, combien y a-t-il de points sur les arêtes du cube à 15cm du sommet ? »

Description de l'activité instrumentée : Recherche expérimentale avec construction de maquettes et représentations en perspective.
Lors de la correction, le logiciel permet la visualisation conjointe de la sphère et du cube sous différents points de vue.

Accès au sommaire | Accès à la liste des scénarios

Scénario 1:

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée[1]
1	Elève	Recherche	Individuelle		10 min
2	Elève	Recherche	groupe		20 min
3	Elève + enseignant	Mise en commun ; situation de débat dans la classe	collective		15 min
4	Enseignant	Résolution du problème	Classe entière		10 min

Scénario 2 :

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée[1]
1	Elève	Narration de Recherche	Individuelle	Travail à la maison	
2	Enseignant	Sélection des procédures élèves et recensement des erreurs			
3	Elève + enseignant	Mise en commun ; situation de débat dans la classe	collective		45 min
4	Enseignant	Visualisation de la solution	Classe entière		10 min

Accès au sommaire

[1] Cette durée est donnée à titre indicatif et prévisionnel

Nom du fichier : cubspher.g3w

Logiciel utilisé : geospacW

Description : La commande A fait apparaître la sphère
La commande B fait apparaître le cube
La commande M fait apparaître les trois points d'intersection

Mode d'emploi : Utilisation du logiciel geospacW

Accès au sommaire

ÉNONCÉ

Vous disposez d'un cube de 10cm d'arête et vous désignez par A un de ses sommets.
Déterminez tous les points du cube situés à 15 cm de A.

CONSIGNES

La première narration de recherche est présentée par des consignes orales qui prennent la forme suivante:

" Je vous propose un problème où vous aurez tous beaucoup de choses à m'écrire. Pourquoi ? Et bien tout simplement parce que je vous demande de ne pas vous contenter de me donner la réponse mais de me raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver. Vous me décrirez vos essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont abouti à rien. Toute mon attention ira sur la qualité et la persévérance de votre recherche. Je ne tiendrai pas compte de l'orthographe ou de la syntaxe. J'attacherai plus d'importance à la précision de cette narration qu'au résultat trouvé lui-même."

Ces consignes orales sont étayées par une phrase écrite à la fin de l'énoncé, par exemple:

" Raconte sur ta feuille les différentes étapes de ta recherche, les remarques, les aides, les observations que tu as pu faire et qui t'ont fait changer de méthode ou qui t'ont permis de trouver. Ce serait bien si tu pouvais joindre tous tes brouillons numérotés, donner des précisions sur la durée et l'organisation de ton travail. "

Accès au sommaire

1. PROCEDURES ELEVES :

En seconde ou en troisième, on relève des approches très semblables.

Ces différentes méthodes de recherche traduisent les conceptions correctes ou erronées des élèves pour résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace. On trouve des procédures relevant de démarches expérimentales utilisant des mesures sur maquettes ou dessins et des démarches calculatoires en appliquant fréquemment le théorème de Pythagore.

Les procédures décrites ci dessous ont été mises en œuvre par des élèves de seconde, on trouve des procédures identiques chez les élèves de troisième, qui cherchent les points solutions sur les arêtes et non sur les faces.

Considérations sur l'énoncé

Procédure 1. Localiser le sommet A.

L'élève s'interroge clairement sur la dépendance (ou l'indépendance) de la nature de la solution avec le choix initial du sommet A.

Procédure 2.Plein ou vide.

Au cours de sa recherche, l'élève éprouve le besoin de savoir si une sphère ou un cube sont des objets pleins ou vides car il a la certitude que cela a une incidence sur la nature de la réponse.

Procédure 3. Sphère.

Après quelques essais, l'élève affirme que la solution de ce problème est donnée par la recherche de l'intersection d'une sphère et d'un cube.

Utilisations d'une maquette

Procédure 4. Localisation, existence et maquette.

L'élève réalise une maquette creuse du cube en grandeur réelle ou à l'échelle, il repère un sommet A. Il place l'extrémité d'une ficelle de longueur convenable en A et déplace l'autre extrémité. Il affirme qu'il existe des points répondant à la question.

Utilisations de dessins

Procédure 5. Patron et cercle.

L'élève dessine un patron du cube, repère un point A, trace un cercle de centre A de rayon 15 cm ; ce dessin est parfois réalisé à l'échelle 1/2. Il affirme que les intersections de ce cercle avec les représentations des faces du cube sont les solutions.

Procédure 6. Perspective et cercle.

L'élève dessine le cube en perspective cavalière, repère un point A, trace un cercle de centre A de rayon 15 cm ; ce dessin est parfois réalisé à l'échelle 1/2. S'il observe des intersections, il affirme que les intersections de ce cercle avec les représentations des faces du cube sont les solutions. S'il n'observe aucun point d'intersection, il affirme qu'il n'existe pas de solution.

Procédure 7.Vue et cercle.

L'élève dessine une vue du cube, c'est à dire un carré de 10 cm de côté, repère un point A et trace un cercle de centre A de rayon 15 cm. Comme ce cercle ne coupe pas le carré, il affirme qu'il n'existe pas de solution.

Procédure 8. Dessin des faces et cercle.

L'élève dessine en vraie grandeur une face contenant A et un cercle de centre A de rayon 15 cm. Il affirme qu'il ne peut y avoir aucun point sur les trois faces contenant A.

Utilisation de calculs

Procédure 9. Localisation et calcul.

L'élève calcule la diagonale d'une face contenant A et affirme qu'il ne peut y avoir aucun point sur les trois faces contenant A.

Procédure 10. Localisation, existence et calcul.

L'élève calcule la diagonale d'une face contenant A puis la diagonale du cube, il constate que 15 est compris entre ces deux longueurs. Il affirme qu'il existe des points répondant à la question sur les trois faces ne contenant pas A.

Procédure 11. Localisation, essais et existence.

L'élève calcule la diagonale d'une face contenant A. Il calcule ensuite à l'aide du théorème de Pythagore la distance de A à quelques points sur des arêtes des faces ne contenant pas A. Il choisit le milieu d'une de ces arêtes, constate qu'il convient et affirme qu'il existe des points répondant à la question sur les trois faces ne contenant pas A.

Procédure 12. Localisation et balayage.

L'élève dessine plusieurs plans contenant une arête passant par A. Dans chacun d'eux, à l'aide d'un calcul ou d'un dessin, il détermine un ou plusieurs points répondant à la question. Il propose une solution obtenue point par point sans se prononcer sur sa forme.

Procédure 13. Localisation sur une face et arc de cercle.

L'élève réalise un triangle rectangle dont un côté est une arête passant par A. À l'aide du théorème de Pythagore, il recherche tous les points à 15 cm de A situés sur la face perpendiculaire à cette arête. Il constate qu'ils déterminent un arc de cercle.

Procédure 14. Cheminement sur les arêtes.

L'élève cherche des points à 15 cm de A en suivant les arêtes, il décompose 15 cm en 10 cm (une arête issue de A) + 5cm et il trouve donc 6 points solutions.

Procédure 15. Calculs de volumes

Lorsque le cours sur la sphère a été fait, l'élève calcule le volume du cube et de la sphère et les compare.

2. QUELQUES ELEMENTS D'ANALYSE :

<u>Utilisation de la maquette</u>

A travers les écrits des élèves, on voit que l'utilisation d'une maquette (procédure 4) n'est pas satisfaisante pour eux ; c'est du bricolage, ce ne sont pas de "vraies" mathématiques.
Pour les uns il ne s'agit que d'une première approche expérimentale, comme l'écrit Marie, élève de 3ème :

> *Je trouve grâce à une ficelle des résultats approximatifs qui ne me permettent pas une réponse scientifique.*

Pour d'autres élèves, en général des élèves en difficulté, c'est la seule solution qu'ils proposent et bien que la démarche et les solutions soient correctes, ils ne sont pas satisfaits de leurs propositions.

Michel, 3ème, arrive en classe avec un cube en carton dont il a évidé les faces, une ficelle est tendue à l'intérieur ; sur sa copie, il écrit :

> *C'était difficile, j'ai essayé mais je n'arrive pas à faire autre chose mais j'ai un peu trouvé.*

<u>Démarche expérimentale en géométrie dans l'espace et profils d'élèves</u>

Exceptés les élèves qui ne proposent que la procédure maquette, tous les élèves ont une première approche du problème en réalisant une représentation plane du cube (procédure 5, 6, 7, 8). Ils adoptent souvent une méthode expérimentale identique à celle de la géométrie plane (tracés, mesures sur le dessin), mais à la suite de ces essais, l'utilisation et l'interprétation de leurs résultats traduisent des profils d'élèves très différents quant à leur perception d'un problème de géométrie dans l'espace.

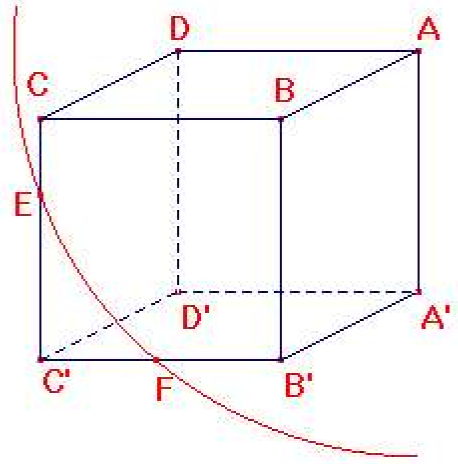
Nous relevons deux types de démarches d'élèves : les uns restent dans un problème de géométrie plane (Caroline, Guy), les autres ont une bonne image mentale de l'objet en trois dimensions en replaçant le problème dans l'espace (Alexandre, Clément, Adélaide)

<u>Ils restent en géométrie plane</u>

Caroline enchaîne les procédures 6 et 1. Elle sait dessiner la représentation en perspective cavalière d'un cube, mais elle ne l'interprète pas. Elle transforme donc ce problème de géométrie dans l'espace, en un problème de géométrie plane en travaillant sur les dessins. Les solutions dépendent du centre du cercle tracé, aucun retour à l'objet cube n'est envisagé.

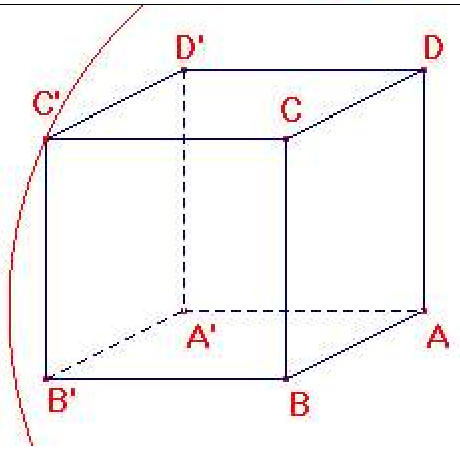
Dans cette figure, il n'y a que deux points à 15 cm du point A.

On les nomme E et F.



Dans cette figure, un seul point passe à 15 cm du point A : le point C'.

Avec d'autres figures, si je change le sommet A, je trouve d'autres solutions.

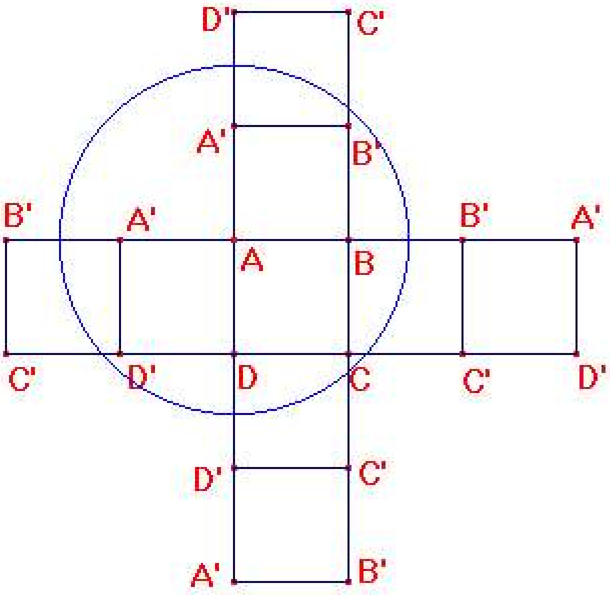


Certains élèves élaborent une discussion autour des différentes représentations en perspective cavalière du cube suivant l'angle des fuyantes ou le coefficient de réduction.

Cette approche expérimentale est également mise en œuvre sur le dessin du patron du cube en enchaînant les procédures 5 et 1, comme le montre la copie de Guy (3ème) :

Il suffit de tracer une sphère de 15 cm de rayon.

Mais une sphère est trop compliquée à réaliser ; je vais mettre le cube à plat.



Pour ce type d'élèves, un travail de remédiation est nécessaire avant d'envisager tout nouvel apprentissage en géométrie dans l'espace. Des activités reposant sur l'interaction entre représentations et maquettes leur permettront de se constituer progressivement des représentations mentales indispensables à tout raisonnement dans un problème de géométrie dans l'espace [2]

Ils replacent le problème dans l'espace

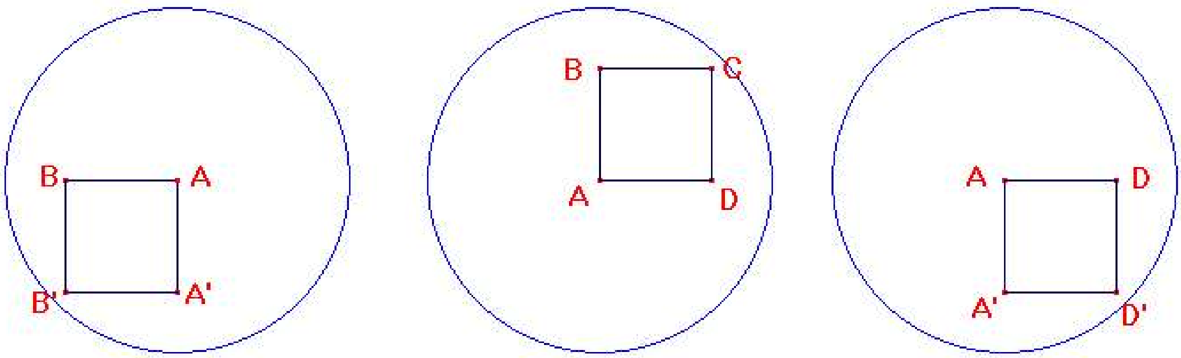
Après avoir eu une démarche expérimentale sur des dessins (procédures 6, 5), une étude critique de leurs résultats et un retour à la situation spatiale du problème amènent les élèves à s'engager dans des procédures calculatoires 9, 10, 13.

Ils expliquent leurs changements de stratégies comme Alexandre qui a réalisé un dessin semblable à celui de Guy et qui ajoute :

> *Cette figure n'apporte rien, vu que c'est un volume que l'on cherche et non une surface plane.*
> *Vu que ce patron est un cube, ce cercle est une boule de 15 cm de rayon.*

De même, Clément, élève de 3ème, écrit :

> *Je dessine les trois faces où est représenté le point A.*



Vue de droite *Vue de face* *Vue de dessus*

> *Je remarque à l'œil nu qu'il n'y a aucun point sur le cube qui soit à 15 cm de A*
> *Mais parfois il y a des trompe l'œil !!!!*
> *STOP*
> *Je m'arrête là me rendant compte de ma bêtise car en fait le point C' est bien plus écarté de A que de D,C ou B*
> *Mais pour qu'il y ait des points à 15 cm de A sur le cube, il faut que AC' soit supérieur à 15 cm.*

[2] REPERES-IREM n°33 : Enseigner la géométrie dans l'espace Freddy Bonafé, Mireille Sauter IREM de Montpellier
Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège IREM de Strasbourg

3. CONCLUSION

Les élèves qui arrivent à résoudre ce problème ont une bonne image mentale du cube en dimension 3, ils savent extraire des sous-figures planes, ici des triangles rectangles, à partir de la représentation en perspective cavalière.

Un travail de remédiation pour les élèves en difficulté serait de construire des maquettes en papier, en carton, puis de dessiner et étudier les différentes représentations de ces maquettes.

Il faudrait également faire la démarche inverse, c'est à dire, à partir de la représentation, construire l'objet.

Enfin, un travail plus approfondi sur les représentations, consisterait à dessiner en vraie grandeur différentes sections du cube, la maquette pouvant être un objet de contrôle ou une étape intermédiaire.

Accès au sommaire