<u>Le boulier chinois :</u>
<u>Une aide pour enseigner les décimaux au Collège.</u>

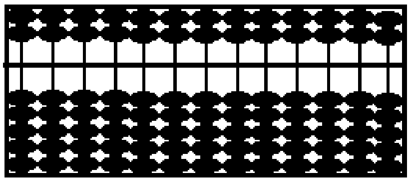
Depuis plusieurs années, à l'IREM de Lille, nous utilisons le boulier chinois dans nos classes, notamment en Cours Moyen et en Sixième. Nous avons développé cette pratique, pensant que l'utilisation d'un boulier pouvait permettre aux élèves d'appréhender les décimaux sous un angle différent. Le boulier aide également la mise en place et l'utilisation d'algorithmes de calcul, que l'élève pourra réinvestir lors de calculs réfléchis ou mentaux qu'il pratique depuis l'école primaire.

L'atelier présenté lors du Colloque de Lyon avait pour objectif de découvrir et de prendre en main le boulier et de montrer l'ensemble des possibilités qu'offre le boulier dans notre enseignement.

Pour ce compte-rendu, je me limiterai à montrer comment prendre en main rapidement le boulier chinois, pour l'écriture de nombres, l'addition et la soustraction ainsi que pour la multiplication. Je ne développerai pas l'aspect pédagogique et didactique de son utilisation en classe, ce sera l'objet d'une prochaine publication de l'IREM de Lille.

Il est nécessaire au lecteur de ce texte de se munir d'un boulier (on en trouve dans de nombreux restaurants chinois) et d'effectuer les manipulations proposées.

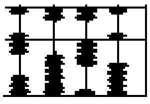
I- Présentation du boulier : le Suan Pan.



Le boulier comprend en général 13 barres verticales, portant chacune 7 boules séparées par une barre horizontale (2 en haut et 5 en bas). On pourrait utiliser un boulier japonais qui lui ne comprend que 5 boules sur chaque barre (1 en haut et 4 en bas), mais le hasard a fait que c'est le Suan Pan que nous avons d'abord rencontré. Dans tous les cas, le principe est le même pour l'utilisation, si ce n'est la gestion des retenues lors des opérations.

<u>Principes</u> :

1) Activer une boule, c'est la mettre en contact soit avec la barre médiane, soit avec une boule déjà en contact avec cette barre. Sur le dessin ci-dessus, aucune boule n'est activée : le boulier est à 0.
2) A chaque barre correspond le rang d'un chiffre. Quand on travaille avec des entiers, on peut prendre la barre de droite comme barre des unités (on peut prendre la barre que l'on veut comme barre des unités. Le rang des autres en découlera).
3) Sur chaque barre, une boule du bas vaut une unité de l'ordre de la barre, et une boule du haut vaut cinq unités de ce rang [1].
4) On doit utiliser le minimum de boules.



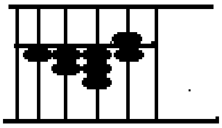
Pour cet exemple on a écrit :
7045 = 7 milliers + 0 centaine + 4 dizaines + 5 unités

II- La virgule :

Les Chinois utilisaient un petit signe pour indiquer le chiffre des unités, en général le signe de la grandeur considérée ; ce petit signe est écrit en dessous de ce chiffre. Parfois, lorsque le contexte suffit, ce signe n'est même pas noté.

[1]J'appelle boule "unaire" une boule dont la valeur est 1 et boule"quinaire" une boule dont la valeur est 5.

On se met d'accord pour repérer une barre comme barre des unités (en général, je prends la quatrième) ; certains collent un petit bout de papier *entre* deux barres (" ça fait une virgule ").



Suivant le choix de la barre des unités, on peut lire 12,36 ou 1,236.

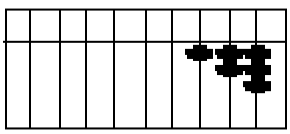
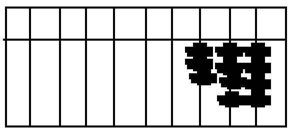
Dans l'exemple ci-dessous, en prenant comme barre des unités celle du 2, on lit directement plusieurs écritures du nombre :

$12{,}36$ mais aussi $\frac{1236}{100}$ ou $12 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$ ou encore $\frac{123{,}6}{10}$,...

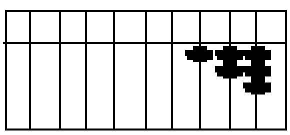
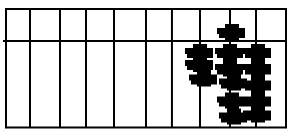
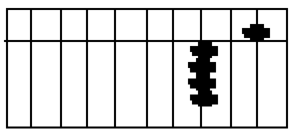
III-Additions sur le boulier :

<u>a) Additions « où l'on a suffisamment de boules sur les barres » :</u>

Pour effectuer, par exemple, 123 + 221, on écrit 123 sur le boulier, puis on ajoute 221, c'est-à-dire que l'on monte 2 boules sur la barre des centaines, deux sur la barre des dizaines et une sur celle des unités. On effectue ces opérations dans l'ordre que l'on veut, commençant généralement par ce qui est facile à effectuer.

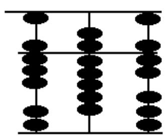
 

Pour 123 + 282, le procédé est le même, il faudra juste veiller à utiliser le principe 4, qui exige que le nombre soit écrit avec le minimum de boules. Il faudra donc remplacer les cinq unités par une boule quinaire et les dix dizaines par une centaine. Ce sont nos retenues usuelles.

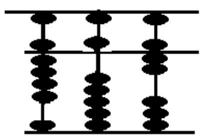
  

Le procédé est le même pour 372 + 585

On pose 372 ; pour ajouter 585 , pas de problème pour les unités : on active une boule quinaire. Pour ajouter 8 sur la barre des dizaines, on a juste suffisamment de boules : une quinaire et 3 unaires. Il reste à activer une quinaire sur la barre des centaines ; il est important de noter que toutes ces manipulations peuvent se faire dans un ordre indifférent. On obtient la position suivante :



On désactive les deux boules quinaires en activant une boule sur la barre située immédiatement à gauche ; puis on désactive les 5 boules unaires en activant une boule quinaire de la même barre. On obtient :

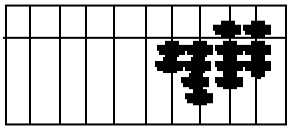


Remarque :
Au lieu d'ajouter 8 , on peut ajouter 10 et enlever 2. Cette méthode s'imposera lorsqu'il manquera des boules sur une barre.

b) Addition « où il manque des boules sur les barres » :

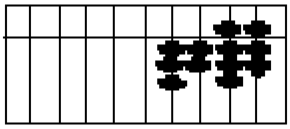
Par exemple : 2487 + 879

On active 2487.

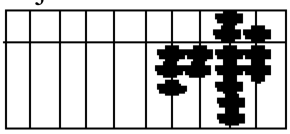


Sur la barre des unités, on ne dispose que de 8 unités pour ajouter 9. Sur celle des dizaines, on en dispose exactement 7 pour ajouter 7, (on peut à la rigueur effectuer directement cettte opération, mais ce n'est pas pertinent). Et sur celle des centaines, on n'en dispose que de 7 pour ajouter 8.

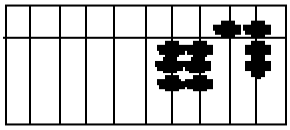
Ajoutons 8 centaines (il me semble plus intéressant de commencer par gérer les chiffres de rang élevé). On active 1 boule unaire sur la barre des milliers et on en enlève deux sur celle des centaines. On adaptera cette méthode à de nombreuses situations similaires : ajouter 98, ou 47 ...



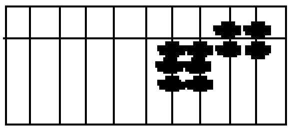
Pour ajouter 7 dizaines, on peut utiliser toutes les boules disponibles, puis simplifier, ou bien on ajoute 1 centaine et on enlève 3 dizaines.



ou



Pour ajouter 9, on est obligé d'ajouter 10 et d'enlever 1. On rapprochera cette démarche de l'action " rendre la monnaie ".



Les additions peuvent s'organiser dans un ordre quelconque : on n'est pas obligé de commencer par les unités, puis les dizaines, et ainsi de suite.

Lors de son utilisation en classe, c'est un des objectifs à atteindre au cours moyen et en sixième : « Pour ajouter 98, on ajoute 100 et on enlève 2 ».

Les nombres rencontrés ici sont entiers, avec des décimaux, la technique reste la même.

IV- Soustraction :

Le principe de la soustraction est sensiblement le même que celui de l'addition. On retrouve les mêmes situations :

1) des exemples simples où il suffit d'enlever le nombre de boules nécessaire sur chaque barre : c'est le cas par exemple pour 243 - 32

2) des situations un peu moins simples, comme pour 385 – 32.
On pose comme principe : « *enlever 2, c'est enlever 5 et ajouter 3* »

Ce qui s'écrit *385 - 2 = (385 - 5) + 3*

3) le cas où se pose la nécessité de la retenue se rencontre par exemple dans 373 -57

La règle qui en découle est : « *enlever 7, c'est enlever 10 puis ajouter 3* »

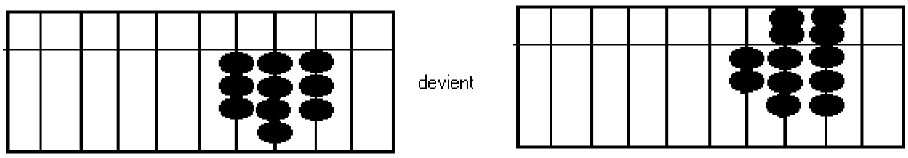
373 - 7 = (373 - 10) + 3

ou bien:

« *enlever 57, c'est enlever 60 et ajouter 3* »

373 - 57 = (373 - 60) +3

4) les réelles difficultés de la soustraction peuvent apparaître sur des exemples tels que 343 – 57. Dans ce cas, une première méthode consiste à changer l'écriture de 343 de façon à obtenir suffisamment de boules sur chaque barre.



On peut aussi poser *« enlever 57, c'est enlever 100 et ajouter 43 »*

5) enfin des cas où l'on découvre qu'on peut commencer par simplifier la tâche :

7239 - 6325

on *voit* sur le boulier qu'on peut faire de suite 7000 - 6000.

Il nous reste à faire 1239 - 325. La seule difficulté restant est d'enlever 300.

Récréation 1 **: PGCD**

Lorsque l'on maîtrise la soustraction, il n'est pas difficile de calculer un PGCD. On va utiliser l'algorithme par « soustractions successives».

Exemple : Pour calculer le PGCD de 324 et 630 :

D, le PGCD de A et B est le plus grand nombre qui divise A et B. De plus D est également le PGCD de A-B et A.

On écrit donc ces deux nombres sur le boulier. La méthode consiste à retrancher du plus grand nombre le plus petit des deux. On obtient alors sur le boulier 324 et 306. Le PGCD de 324 et 630 est aussi le PGCD de 324 et 306. On réitère l'opération jusqu'à obtenir sur le boulier deux fois le même nombre, ici 18.

Récréation 2 : **racine carrée.**

Le boulier est pratique pour les racines carrées des nombres inférieurs à 10000.

Préambule 1 : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 .....+ (2n-1) = n^2$

La première méthode pour connaître la racine carrée d'un nombre, ou au moins sa partie entière, consiste à enlever les entiers impairs et de compter le nombre de soustractions effectuées.

Par exemple pour 144 : Sur le boulier on écrit 144, et on place à côté un compteur que l'on agrémente d'une unité après chaque soustraction.

On enlève d'abord 1, et on ajoute 1 au compteur, puis on enlève 3, et on ajoute 1 au compteur, puis 5, puis 7,…On effectuera en tout 12 soustractions, il reste zéro. La racine carrée de 144 est 12. Pour les nombres qui ne sont pas des carrés parfaits, on ne peut connaître que la partie entière de la racine carrée.

La difficulté de cette méthode est de se rappeler la soustraction que l'on vient d'effectuer.

Préambule 2 :

$$100 = 1 + 3 + 5 + \dots + 19$$
$$400 = 1 + 3 + 5 + \dots + 39$$
$$900 = 1 + 3 + 5 + \dots + 59$$
$$1600 = 1 + 3 + 5 + \dots + 79$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(10k)^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (20k-1)$$

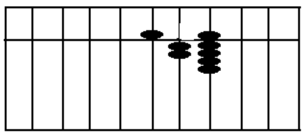
Remarque : pour un nombre <10000, la racine est au plus à 2 chiffres.

<u>Exemple :</u>

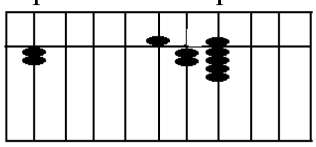
$$144 = 100 + 44 = (1 + 3 + \dots + 19) + 21 + 23$$

d'où sur le boulier :
on pose 144 au milieu du boulier. Il est clair que la racine de 144 est un peu plus grande que 10. Le but est de faire apparaître le (2n-1) sur les barres de gauche.
On enlève 100 de 144 ; on pose 1 sur la barre de gauche
on a donc enlevé 1 + 3+ ...+ 19; il nous reste à enlever 21 + 23.
Pour faire apparaître 21, on double le 1 inscrit (on a écrit 2 dizaines) et on ajoute 1 (sur la barre juste à droite). Enlevons 21 à 44 ; en ajoutant 2 au nombre de gauche, on fait apparaître 23, qu'on enlève au nombre qu'il nous restait ; il reste 0.
Le nombre écrit à gauche est notre (2n-1). On ajoute 1 ; on divise par 2. C'est fini.

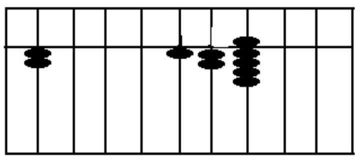
<u>Calcul de</u> $\sqrt{529}$



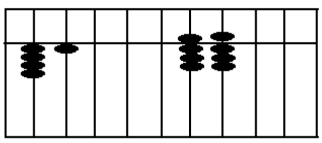
on pose 529 n'importe où au milieu du boulier



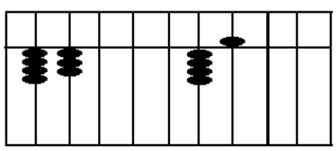
On découpe 529 en tranche de deux chiffres ; pour la tranche de gauche, le plus grand carré est 4 ; on pose 2 sur une barre à gauche et on enlève 4 de 5 ; on obtient :



On " abaisse " la tranche suivante, on double le 20 et on ajoute 1, et on enlève 41 à 129. On obtient :



On ajoute 2 à 41, et on enlève 43 de 88. On obtient :



On ajoute 2 à 43, qu'on enlève de 45 ; il reste 0. On a donc fait :
529 - (400 + 41 + 43 + 45) = 529 - (1 + 3 + 5 ...+ 39 + 41 + 43 + 45).

Ce 45 est notre 2n - 1 ; d'où n = 23.
Le dernier terme est 45 = 2x23 - 1. D'où $\sqrt{529} = 23$

V- Multiplications sur le boulier :

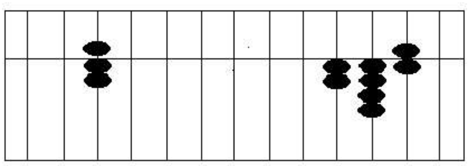
Remarques préliminaires :

- toutes les multiplications à un chiffre sont faites de tête par le calculateur ; il doit donc bien connaître ses tables de multiplication jusqu'à 9 x 9.
- les techniques de l'addition sur le boulier doivent être bien acquises, notamment les techniques de simplification (calculs à faire en utilisant le minimum de boules).

1) Cas où l'un des deux nombres n'a qu'un seul chiffre.

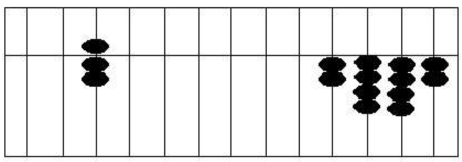
Exemple : 246 x 7.
Celui qui a le moins de chiffre sera le multiplicande, écrit pour mémoire quelque part à gauche sur le boulier. Le multiplicateur est écrit à droite en laissant au moins *une* barre libre (*une* car le multiplicande n'a qu'*un* chiffre). Cette barre sera celle des unités du produit.

Le plan est le suivant : ajouter 6 x 7 = 42 puis 40 x 7 = 280 , puis 200 x 7 = 1400.

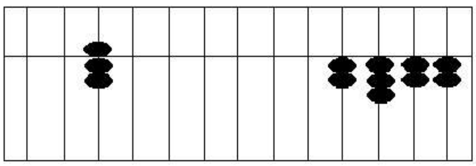


On suivra les étapes suivantes, le produit prenant petit à petit la place du multiplicateur.

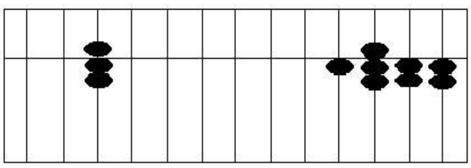
Première étape : on ajoute 6 x 7 = 42 , tout en effaçant le chiffre 6, sur la première barre.



Deuxième étape : on décale d'une barre (la première barre a terminé son travail) puis on ajoute 4 x 7 = 28 sur la seconde barre (on ajoute 3 sur la troisième barre et on enlève 2 sur la deuxième).



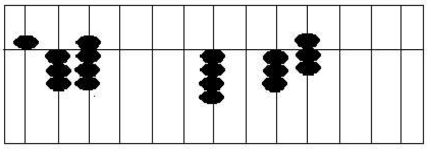
Troisième étape : on décale encore d'une barre, puis on ajoute 2 x 7 = 14, tout en effaçant le chiffre 2, sur la troisième barre (on ajoute 1 sur la quatrième barre et on enlève 1 sur la troisième).



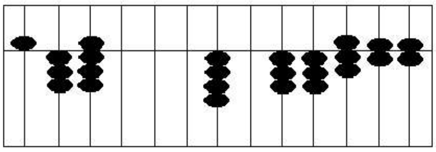
2) Cas où les nombres ont plusieurs chiffres.

Exemple : 4037 x 538.

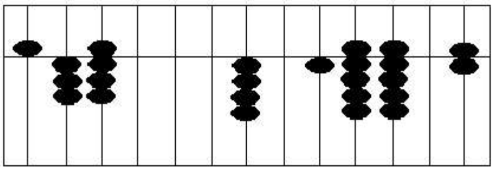
Le multiplicande est écrit à gauche du boulier, pour mémoire, et le multiplicateur à droite, en laissant au moins *trois* barres libres à droite du boulier (trois car le multiplicande a trois chiffres ; on voit ici l'intérêt de choisir le nombre le plus court comme multiplicande).



Première étape : ajouter 7 x 538 sur la barre des unités du produit tout en effaçant le 7, c'est à dire 7x8=56 sur la première barre, 7x30=210 (21 sur la deuxième barre) et 7x500=3500 (35 sur la troisième barre). On obtient :

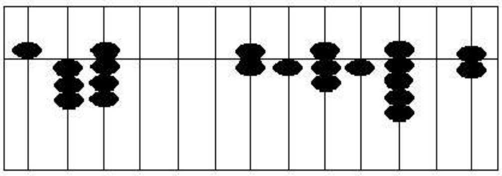


Deuxième étape : on décale d'une barre (la barre à droite du boulier a terminé son travail). Ainsi, sur la barre des dizaines du produit, on ajoute 3 x 538 tout en effaçant le 3, c'est à dire 24 (*) sur la seconde barre du boulier, puis 9 sur la troisième et 15 sur la quatrième. On obtient :



(*) ajouter 24 nécessite ici une bonne maîtrise de l'addition.

Dernière étape : on décale de *deux* barres (deux à cause du 0) et ajoute 4 x 538 sur la quatrième barre du boulier (les trois barres à droite ont terminé leur travail) tout en effaçant le 4. Pour cela, on ajoute 32 sur la quatrième barre, 12 sur la cinquième et 20 sur la sixième. On obtient :

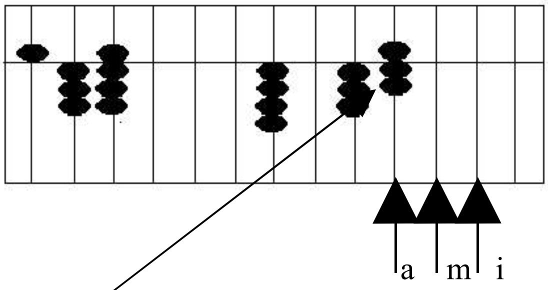


La main droite manipule les boules lors des calculs. Les doigts de la main gauche, posés sur le bord inférieur du boulier, permettent de se repérer dans le dédale des calculs. On utilisera un (respectivement deux, trois, quatre) doigt(s) pour un multiplicande à un (respectivement deux, trois, quatre) chiffres.

Lors de la première étape, l'index montre la barre des unités, le majeur celle des dizaines, etc…

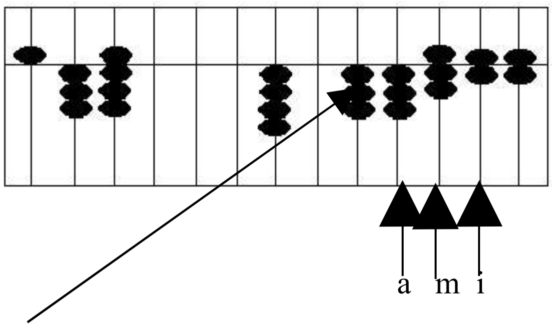
Reprenons le calcul de 538 x 4037.

J'installe les nombres et je place trois doigts sur le bord du boulier comme ci-dessous.



Ce 7, c'est le chiffre multiplicateur. Il est juste à gauche de mes trois doigts et il va disparaître. J'appuie sur l'index i, je calcule 7 x 8 = 56, je monte 6 sur la barre 1 et 5 sur la barre 2. Puis, j'appuie sur le majeur m, je calcule 7 x 3 = 21 que j'ajoute sur cette barre 2. J'appuie sur l'annulaire a, j'efface le 7 qui est juste à gauche de ce doigt, je calcule 7 x 5 = 35 que j'ajoute sur cette troisième barre.

Je décale mes doigts d'une barre vers la gauche pour la deuxième étape.



Ce 3, toujours juste à gauche de mes trois doigts, est maintenant le chiffre multiplicateur.
J'appuie sur l'index i, je calcule 3 x 8 = 24 que j'ajoute sur cette barre. Puis, j'appuie sur le majeur m, je calcule 3 x 3 = 9 que j'ajoute sur cette barre et enfin, j'appuie sur l'annulaire a, tout en effaçant le 3 multiplicateur, je calcule 3 x 5 = 15 que j'ajoute sur cette barre.

Je décale maintenant mes doigts de deux barres et je procède de même.

VI- Conclusion :

Le boulier est donc un outil de calcul facilement abordable pour les opérations de base, même si, ici, je n'ai pas développé la division (on peut l'imaginer comme soustractions successives du diviseur au dividende en commençant par le rang le plus élevé).

Il permet de mettre en place des algorithmes simples, comme « pour enlever 99, on enlève 100 et on ajoute 1 », qui sont utilisés lors de calculs mentaux. C'est ce que l'on appelle le calcul réfléchi.

C'est cet aspect qui justifie l'utilisation du boulier dans nos classes : permettre à nos élèves d'appréhender plus facilement des stratégies de calcul économiques. C'est également une aide réelle à l'apprentissage des décimaux, pour lesquelles la virgule n'est plus un simple séparateur entre partie entière et partie décimale, mais simplement un repère qui permet de savoir quel chiffre est celui des unités.

Pour terminer, voici quelques exercices progressifs que l'on peut proposer pour prendre en main un boulier et commencer à maîtriser les opérations de bases. Pour compléter votre technique, vous pouvez lire les deux livres de Jean Cumin et Jean Hossenlop « Le boulier : initiation » et « Le boulier : perfectionnement » (Chiron éditeur)

- Ecrire sur le boulier

234 2013 3400 638 555 6500

- Addition des entiers :

203+231 1200 + 248 72 + 123 1408 + 517
2900 + 4300

2498 + 667 : soit on remplit toutes les barres et on simplifie,
soit on remarque que 2498 = 2500 - 2

1798 + 3409 : ici, il est plus simple de poser 3409 d'abord
et de calculer 3409 + 1800 - 2 = 3409 + 2000 - 2 - 200

- Addition des décimaux :

12,41 + 1,9 72,362 +7,39 0,043 + 2,25 48 + 7,15

- Soustraction des entiers :

68 - 7 ; 79 - 12 ; 68 - 41 ; 78 - 44 ;
21 - 9438 - 90 ; 525 - 90 ; 211 - 99 ; 322 - 80 ;
6238 - 980 ; 639 - 344 ; 423 - 37 ;

- Soustraction des décimaux :

4,75 - 0,18 ; 4,13 - 2,8 ; 13,25 - 1,7 ; 25 - 31,4 ;
423,23 - 37,8